

---

## 5. Séries trigonométriques de Fourier

---

**Exercice 1.** (i) Déterminer le développement en série trigonométrique de Fourier dans  $L^2([0, 2\pi])$  de la fonction  $f$  donnée par  $f(x) = e^x$ .

(ii) En déduire la somme des séries

$$\sum_{m=0}^{+\infty} \frac{1}{m^2 + 1} \quad \text{et} \quad \sum_{m=0}^{+\infty} \frac{(-1)^m}{m^2 + 1}.$$

(iii) Développer en série trigonométrique de Fourier dans  $L^2([-2, 3])$  la fonction  $g$  définie par  $g(x) = \sin(4\pi x)$ .

(iv) Faire de même dans  $L^2([-1, 0])$  avec la fonction  $h$  définie par  $h(x) = \sin^4(\pi x)$ .

**Exercice 2.** On donne la fonction  $f$  définie sur  $\mathbb{R}$  par

$$f(x) = \begin{cases} -1 & \text{si } x \in ]-\pi, 0[ \\ 1 & \text{si } x \in ]0, \pi[ \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}.$$

(i) Déterminer le développement en série trigonométrique de Fourier de  $f$  de  $L^2([-\pi, \pi])$ .

(ii) En déduire la somme des séries

$$\sum_{m=0}^{+\infty} \frac{(-1)^m}{2m + 1}, \quad \sum_{m=0}^{+\infty} \frac{1}{(2m + 1)^2} \quad \text{et} \quad \sum_{m=0}^{+\infty} \frac{1}{m^2}.$$

**Exercice 3.** (i) Déterminer le développement en série trigonométrique de Fourier dans  $L^2([-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}])$  de la fonction  $f$  donnée par  $f(x) = |\sin(x)|$ .

(ii) En déduire la somme des séries

$$\sum_{m=1}^{+\infty} \frac{1}{4m^2 - 1} \quad \text{et} \quad \sum_{m=1}^{+\infty} \frac{(-1)^m}{4m^2 - 1}.$$